چکیده مطالب درسی

معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و محاسبات عددی

(برای دانشجویان رشته های مهندسی)

گردآوری و تالیف :

فـــــرشــــــاد ســــــرایــــــی

مقدمه :

کـــــــــابـــــــــوس شـــــــب امــــــــتـــــــحــــــــان !

تجربه ای که اغلب دانشجویان رشته های مهندسی (به خصوص کسانی که مثل من کمی تنبل باشند !) ، در طول زمان تحصیل خود چندین بار طعم آن را چشیده اند. حجم زیاد مطالب درسی انباشته شده که میبایست مطالعه شده و به ذهن سپرده شود ، انواع و اقسام فرمول ها ، قضایا ، تئوری ها و ... هر یک نقش پر رنگی در ایجاد ترس و دلهره پیش از امتحان دارند.

به خصوص این مسئله در مورد دروس پایه بیشتر خودنمائی میکند ، چراکه دروس تخصصی بواسطه کاربردی بودن ملموس تر بوده و بهتر در ذهن دانشجویان جایگزین میگردد ، اما دروس پایه مانند ریاضیات ، فیزیک و شیمی مبتنی بر تعداد زیادی تئوری و فرمول است که درک آن برای دانشجویان معمولا دشوار می باشد.

راه حل عملی غلبه بر این مشکل استفاده از روش هاییست که بتواند در مدت زمان کوتاه اطلاعات را از حالت پراکنده خارج ساخته و آن را در ذهن دانشجو طبقه بندی نماید.

تجربه شخصی من در این زمینه استفاده از روش گرته برداری و خلاصه نویسی مطالب درسی پس از مطالعه بود که نتایج خوبی را برایم به همراه داشت. روش کار بدین شکل بود که پس از مطالعه ، مسائل و تمرینات مختلف را برای خود دسته بندی نموده و سعی میکردم برای هر دسته یک قاعده و راه حل مشترک و عمومی پیدا نموده و آن را ثبت نمایم.

این روش دو فایده مهم در بر داشت. اول اینکه نوشتن موضوعات موجب جایگزین شدن بهتر آن در ذهن میگشت و دوم اینکه در پایان کار خلاصه ای از مطالب و روشهای حل مسائل در دست داشتم که بواسطه حجم اندک همواره به عنوان یک جزوه دستی همراهم بود و در هر فرصتی با مراجعه به آن میتوانستم موارد تکمیلی را در ذهن خود تداعی و باز آموزی نمایم. حاصل این کار جزوات دستی متعددی شد که برای دروس مختلف دانشگاهی تهیه کرده بودم. لیکن با کمال تعجب ، جزواتی که برای مصرف شخصی خود تدارک دیده بودم مورد توجه و استقبال سایر دوستان قرار گرفت و در اندک زمانی در میان دانشجویان هم دانشگاهی من در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران و حتی سایر دانشگاه ها پخش گردید !

اکنون که بیش از شانزده سال از آن زمان میگذرد ، بر آن شدم تا بخشی از این جزوات خلاصه نویسی شده را که برای دروس پایه معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و محاسبات عددی تهیه کرده بودم در قالب فایل الکترونیکی در آورده و از طریق وب سایت شرکت مهندسی "پترو پالامحور" منتشر نمایم. باشد که مورد استفاده دانشجویان رشته های مهندسی در دانشگاه های کشور واقع گردد.

از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فـرشـاد سـرایـی

خرداد ماه ۱۳۹۰

چکیده درس معادلات دیفرانسیل

۱- تفکیک پذیر : چنین معادلاتی را تفکیک می کنیم .

۲- همگن مرتبهٔ اول : از تغییر متغیر $y = zx$ یا $z = \frac{y}{x}$ استفاده کرده واز آن نسبت به x دیفرانسیل می گیریم .

۳- $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$: از تغییر متغیر $z = ax + by + c$ استفاده نموده واز آن نسبت به x دیفرانسیل می گیریم و در معادله قرار می دهیم .

۴- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$: دو حالت پیش می آید :

الف) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$: با در نظر گرفتن $\lambda = \frac{b}{e} = \frac{a}{d}$ معادله تبدیل به معادله تفکیک می شود . (توجه : اگر حالتی مانند $\frac{(3z+5)\,dz}{7z+33}$ پیش آمد صورت را بر مخرج تقسیم کرده واز فرمول $Q(\text{م.ع}) + R = (\text{مقسوم})$ استفاده می کنیم .) (ممکن است معادله را به فرم $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ بدهند .)

ب) $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$: $x = X + h$ و $y = Y + k$ را در نظر گرفته در معادله قرار می دهیم با صفر قرار دادن $ah + bk + c = 0$ و $dh + ek + f = 0$ ، h و k را می یابیم . در این صورت معادله تبدیل به همگن می شود واز تغییر متغیر $y = zx$ استفاده می کنیم .

۵- معادله دیفرانسیل کامل : پس از انجام آزمون کامل بودن از $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ یا $N = \frac{\partial u}{\partial y}$ انتگرال می گیریم که $h(y)$ یا $h(x)$ حاصل شود . با مشتقگیری از آن و مساوی قرار دادن آن با عبارت دیگر $h'(y)$ یا $h'(x)$ واز آنجا $h(y)$ یا $h(x)$ بدست می آید (حتماً c در آن ظاهر می شود) . جواب معادله بصورت $u(x,y) = C$ خواهد بود .

۶- عامل انتگرال ساز : اگر $Mdx + Ndy = 0$ کامل نبود $g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ و $g(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ را تشکیل می دهیم که اگر وجود داشته باشد (حداقل یکی از آندو) در این صورت در حالت (۱) $\mu = e^{\int g(x)\,dx}$ یا در حالت (۲) $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$ بدست خواهد آمد که با ضرب آن در طرفین، معادله کامل می شود .

۷- خطی مرتبهٔ اول : $y' + P(x)\,y = Q(x)$ این معادله با فرمول زیر حل می شود :

$$e^{\int P(x)\,dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)\,dx}\, Q(x)\,dx + c \; .$$

* برخی انتگرالهای مهم -

$$\int \tan x\,dx = -\ln \cos x$$

$$\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$\int \cot x \, dx = \ln \sin x$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$

$\int \coth x \, dx = \ln \sinh x$

$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x$

$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$

۸- معادلهٔ برنولی ($y' + P(x) y = Q(x) y^n$) : تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ را اعمال می کنیم : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} y^n \frac{dz}{dx}$ که در معادله قرار داده طرفین را در $(1-n)$ ضرب و بر y^n تقسیم می کنیم و به معادله خطی مرتبه اوّل با متغیّر وابسته جدید z می رسیم :

$\frac{dz}{dx} + (1-n) P(x) z = (1-n) Q(x)$.

۹- تبدیل به خطی مرتبه اوّل با عوض کردن جای x و y : تکنیک مناسبی است برای برخی مسائل مانند $y' = \frac{y}{2x + y^3 e^y}$ که تبدیل می شود به : $\frac{dx}{dy} = \frac{2x + y^3 e^y}{y}$ که یک معادله خطی مرتبه اوّل می باشد .

۱۰- معادله ریکاتی ($y' + f(x) y = y^2 r(x) + g(x)$) : با داشتن یک جواب خصوصی می توانیم - جواب عمومی را بدست آوریم . با تغییر متغیّر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ به معادله خطی مرتبه اوّل ذیل می رسیم : $u' + (2 y_1 r(x) - f(x)) u = -r(x)$ ، و آنرا حل می کنیم . (اگر در عبارتی دو انتگرال فرضاً به صورت $\int e^x \frac{1}{x^2} dx$ و $-\int e^x \frac{1}{x} dx$ ، داشته باشیم آن را که توان x اش کمتر است جزء به جزء می زنیم و معمولاً حاصل کار با انتگرالی که شامل توان بزرگتر است حذف می شود .)

۱۱- معادلات مرتبه اول از درجات بالاتر : $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$

، $p = \frac{dy}{dx}$ که آنرا به عوامل اول برحسب p تجزیه می کنیم $[p - f_n(x, y)] \dots [p - f_1(x, y)] = 0$

وحاصل : $p = f_n(x, y)$ و ...... و $p = f_1(x, y)$ که در نتیجه : $F_1(x, y, c) = 0$ و ..... و

، $F_n(x, y, c) = 0$ وجواب معادله : $F_1(x, y, c) \cdot F_2(x, y, c) \dots\dots = 0$

(معمولاً معادلاتی به فرم : $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ که به فرم $p^2 - Sp + K = 0$ در - می آوریم که $S = p' + p''$ و $K = p' p''$)

۱۲- معادلات مرتبه دوّم قابل تحویل به مرتبه اوّل :

الف) فاقد x - $F(y, y', y'') = 0$ ، $y' = p \Leftarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$

$\Leftarrow G(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$

ب) فاقد y - $F(x, y', y'') = 0$ ، $y' = p \Leftarrow G(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

۱۳- معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ که اگر $r(x) = 0$ باشد آنرا همگن می‌نامیم. * برای یافتن جواب عمومی این معادله باید y_c (جواب عمومی معادله همگن) و y_p (جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن) را یافته و باهم جمع کنیم: $y = y_c + y_p$

* $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وابسته خطی هستند اگر $\frac{y_1}{y_2} = Cte$ و درغیر اینصورت مستقل خطی هستند.
* $W(y_1, y_2)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ یاهمواره صفراست یا غیر صفر. $(y_1, y_2 \in [a, b])$
* y_1 و y_2 مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر: $W(y_1, y_2) \neq 0$
* اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادلهٔ همگن باشند $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی همگن است. یعنی برای یافتن جواب عمومی همگن باید دو جواب مستقل خطی را یافته، باهم جمع کنیم (ترکیب خطی از آنها بنویسیم).

A - یافتن جواب عمومی معادله همگن:

روش (I) - یک جواب مانند y_1 را داریم:

$$* \begin{cases} y_2 = V(x)\, y_1 & \text{(مستقل خطی هستند)} \\ V(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx \end{cases}$$

y_2 بدست می‌آید $\Rightarrow$

$\Rightarrow * \; y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

توجه- در انتگرال‌گیری $V(x)$ لازم نیست عدد ثابت وارد کنیم یعنی c لازم نداریم، همچنین اگر y'' ضریبی مانند $M(x)$ داشت با تقسیم طرفین برآن، ضریب y'' را از بین می‌بریم.

روش (II) - ضرایب ثابت: $P, q = Cte$ $\quad y'' + Py' + qy = 0$

معلوم شده که جوابهای مستقل خطی این معادله بصورت $(y = e^{mx})$ می‌باشد.

$\Leftarrow y' = me^{mx} \Leftarrow y'' = m^2 e^{mx} \Leftarrow e^{mx}(m^2 + Pm + q) = 0$

$e^{mx} \neq 0 \Leftarrow m^2 + Pm + q = 0$ (معادله شاخص) * حال سه حالت داریم:

الف- m_1 و m_2 حقیقی: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

ب- $m_1 = m_2 = \frac{-P}{2}$: $y = c_1 e^{-\frac{P}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{P}{2}x}$

ج- $m = a \pm bi$: $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$

قانون دموآر- $e^{\theta i} = \cos\theta + i \sin\theta$

نکته- اگر به چنین چیزی رسیدیم باید بدانیم که یک ریشه حقیقی $\lambda = \sqrt[m]{N}$ داریم که همان $\sqrt[m]{N}$ است و $m-1$ ریشهٔ موهومی دارد که از روش ذیل بدست می‌آیند؛ (m عدد فرد است) :

$$\lambda = \sqrt[m]{N} \Rightarrow \lambda^m = N = N e^{i2\pi} \Rightarrow W = \sqrt[m]{N}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}$$

بسط ضرایب نامعین به مرتبهٔ n :

۱- n ریشه متمایز : همگی به فرم $y = e^{\lambda x}$ خواهد بود.

۲- مکرر حقیقی از مرتبه S : $y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$ و .... و $y_S = x^{S-1} e^{\lambda x}$

۳- موهومی : $y_1 = e^{ax} \cos bx$ $\quad y_2 = e^{ax} \sin bx$

۴- موهومی مکرر از مرتبه S : $y_1 = e^{ax} \cos bx$ و $y_2 = x e^{ax} \cos bx$ و ..... و y_S و $y_{S+1} = e^{ax} \sin bx$ و $y_{S+2} = x e^{ax} \sin bx$ و .... و y_{2S}

* همهٔ جوابها را از حالتهای چهارگانه فوق بدست می‌آوریم وسپس : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots$

دقت شود که، هر کجا به $\lambda = \sqrt[m]{N}$ یا $\lambda^m = N$ برخورد کردیم آنرا به شکل : $\lambda^m = N e^{2\pi i}$ نوشته واز فرمول : ($W = \sqrt[m]{N}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}$) با کمک قانون دموآر ریشه‌های حقیقی و موهومی را بدست می‌آوریم. (m می‌تواند زوج یا فرد باشد)

B- یافتن جواب خصوصی معادلهٔ ناهمگن :

روش لاگرانژ - اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادلهٔ همگن باشند آنگاه y_p به روش ذیل محاسبه می‌شود : $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$

$$V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

C- یافتن جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن : $y = y_g + y_p$

۱۴- جواب عمومی معادله کشی اویلر همگن مرتبهٔ ۲ : $x^2y'' + axy' + by = 0$

معلوم شده که جوابهای مستقل خطی این معادله همگن به صورت $y = x^m$ می باشند و معادلهٔ شاخص همواره به صورت $m^2 + (a-1)m + b = 0$ می باشد .

روش اوّل : معادله شاخص را درنظر می گیریم :

I- $m_1 \neq m_2$ $\qquad y_1 = x^{m_1}$ و $y_2 = x^{m_2}$

II- $m_1 = m_2 = \frac{-(a-1)}{2}$ $\qquad y_1 = x^{\frac{-(a-1)}{2}}$ و $y_2 = (\ln x)\, x^{\frac{-(a-1)}{2}}$

III- $m = \alpha \pm \beta i$ $\qquad y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)$ و $y_2 = x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$

روش دوّم : با اعمال تغییر متغیّر : $x = e^u \iff \ln x = u$,

معادله به شکل $\frac{d^2y}{du^2} + (a-1)\frac{dy}{du} + by = 0$ در می آید که یک معادله مرتبه دوّم همگن با - ضرایب ثابت می باشد . $(\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0)$

$* \; y_1 = e^{\lambda_1 u} = e^{\lambda_1 \ln x} = x^{\lambda_1}$

$* \; y_2 = e^{\lambda_2 u} = e^{\lambda_2 \ln x} = x^{\lambda_2}$

۱۵- $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = x^{\alpha} P_m(\ln x)$:

که اگر $n = 2$ باشد خواهد بود که کشی اویلر ناهمگن $x^2y'' + axy' + by = x^{\alpha}P_m(\ln x)$: در یک حالت خاص می باشد . برای یافتن جواب عمومی آن ابتدا جواب عمومی حالت همگن را - می یابیم . حال برای یافتن یک جواب خصوصی ناهمگن $y_p = x^{\alpha}\bar{P}_m(\ln x)$ را درنظر می گیریم و با جایگذاری آن در معادله ضرایب $A_0, A_1, A_2, \dots$ مربوط به چندجمله ای - $\bar{P}_m(\ln x)$ را می یابیم . سپس : $(y = y_g + y_p)$

۱۶- فرم کلی تر معادله کشی اویلر همگن مرتبهٔ ۲ :

بصورت مقابل است : $a_n(ax+b)^n y^{(n)} + \dots + a_1(ax+b)y' + a_0 y = 0$

که مانند حالت عادی عمل می کنیم . یعنی جوابهای مستقل خطی بصورت $y = (ax+b)^m$ است و $m^2 + (a-1)m + b = 0$ که برحسب نوع ریشه عمل می کنیم مثلاً اگر ریشه مکرر داشتیم : $* \; y_1 = (ax+b)^{\frac{-(a-1)}{2}}$ ، $y_2 = \ln(ax+b)\,(ax+b)^{\frac{-(a-1)}{2}}$ یا ریشه موهومی : $y_1 = (ax+b)^{\alpha}\cos(\beta \ln(ax+b))$ ، $y_2 = (ax+b)^{\alpha}\sin(\beta \ln(ax+b))$

راه دیگر اینکه تغییر متغیر : $\ln(ax+b) = u \iff (ax+b) = e^{u}$ را اعمال می‌کنیم تا معادله به فرم خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت در آید.

۱۷ - جواب خصوصی برای معادله ناهمگن مرتبه n در برخی حالات :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

۱ - $f(x) = P_m(x)$: الف - صفر ریشه معادله شاخص نیست : جواب خصوصی را به فرم $y_p = \tilde{P}_m(x)$ در نظر گرفته در معادله قرار می‌دهیم تا ضرایب بدست آید.

ب - صفر ریشه معادله شاخص است از تکرار S : $y_p = x^S \tilde{P}_m(x)$ را در نظر گرفته عمل می‌کنیم.

۲ - $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$: الف - α ریشه معادله شاخص نیست : $y_p = e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$

ب - α ریشه معادله شاخص از تکرار S است : $y_p = x^S e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$

۳ - $f(x) = P_m(x) \cos\beta x + Q_n(x) \sin\beta x$:

الف - $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$y_p = \tilde{P}_K(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin\beta x \qquad K = \max(m, n)$$

ب - $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرار S باشد :

$$y_p = x^S (\tilde{P}_K(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin\beta x)$$

۴ - $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos\beta x + Q_n(x) \sin\beta x)$:

الف - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$y_p = e^{\alpha x} (\tilde{P}_K(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin\beta x) \qquad K = \max(m, n)$$

ب - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرار S باشد :

$$y_p = x^S e^{\alpha x} (\tilde{P}_K(x) \cos\beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin\beta x)$$

۱۸ - اگر : $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x) + \dots + R_N(x)$

برای یافتن جواب خصوصی، معادله را تک تک با $R_1(x)$ و ..... و $R_N(x)$ در نظر گرفته و y_{1P} و ..... و y_{NP} را یافته باهم جمع می کنیم .

۱۹- تبدیل T را خطی گوییم هرگاه :
$$T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha T f(x) + \beta T g(x)$$

۲۰- تبدیل لاپلاس -
$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

۲۱- فرمولهای مستند -

$* L[1] = \frac{1}{s}$ $\quad * L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$* L[t] = \frac{1}{s^2}$ $\quad * L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$

$* L[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}$ $\quad * L[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad (s > |a|)$

$* L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$ $\quad * L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$ $\quad * L[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

۲۲- قضیه - اگر $L[f(t)] = F(s)$ موجود باشد $\Rightarrow \lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

مثلاً : $L^{-1}[s^2]$ نمی تواند موجود باشد .

۲۳-
$$* L[f'(t)] = s L[f(t)] - f(0)$$
$$* L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - s f(0) - f'(0)$$

۲۴- قضیه - (یا)
$$* L^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t f(u)\, du \; *$$
$$* L\left[\int_0^t f(u)\, du\right] = \frac{L[f(u)]}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

(مثلاً) : $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} F(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s} F(s)}{s}\right] = \int_0^t \left[\int_0^t f(u)\, du\right] du$

(مثلاً) : $L^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{2}{s(s^2+4)}}{s}\right]$

۳۵- انتقال بر محور S -

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

۳۶- انتقال بر محور t -

$$L^{-1}[e^{-as} F(s)] = \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$$

$$H(t-a) \text{ هیوساید } = \begin{cases} 0 & t-a < 0 \\ 1 & t-a > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$L^{-1}[e^{-as} F(s)] = H(t-a)\, f(t-a) \quad ***$$

۳۷- الگوی جالب -

$$L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2s+5}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2+4}\right]$$

$$= 2L^{-1}\left[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right] = \underbrace{2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]} - \underbrace{L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right]}_{e^{-t}\sin 2t}$$

همان $\cos 2t$ است که s آن به اندازهٔ ۱+ انتقال یافته
پس حاصل باید بصورت $e^{at} f(t)$ درآید که با انتخاب
$a=-1$ می شود : $e^{-t}\cos 2t$.

۳۸- مهم - تبدیل پله‌ای به خطی -

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & 0 < x < a_1 \\ g_2(x) & a_1 < x < a_2 \\ g_3(x) & a_2 < x < a_3 \\ g_4(x) & a_3 < x \end{cases} \Rightarrow$$

$$g(x) = g_1(x) + [g_2(x) - g_1(x)]\, H(x-a_1) + [g_3(x) - g_2(x)]\, H(x-a_2) + [g_4(x) - g_3(x)]\, H(x-a_3)$$

* که لاپلاس گیری از آن طبق فرمول $L[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$ به راحتی امکان پذیر است.

۲۹ـ الگوی جالب ـ

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right] = L^{-1}\left[e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right]$$

$= H(t-1)\; f(t-1)$ * (امّا) : $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+4}\right]$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}\right] = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t}\sin 2t\, dt \Longrightarrow$$

(به کمک جزء به جزء) $\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right] =$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t - \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{2}{5}\right) = f(t)$$

$$\Rightarrow * \; L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)}\right] = H(t-1)\left(-\frac{1}{10}e^{-(t-1)}\sin(2t-2) - \frac{1}{5}\cos(2t-2)\cdot e^{-(t-1)} + \frac{1}{5}\right)$$

۳۰ـ قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس :

$L[f(t)] = F(s)$

$L[t\,f(t)] = (-1)^1 F'(s)$

$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

مثلاً : $L[t\cos t] = -\left(L[\cos t]\right)' = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' =$

$$-\left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

۳۱ـ قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس :

$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$ (یا) * $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$ *

(مثال) : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\, ds = \operatorname{Arc}\tan s \Big)_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

۲س ـ قضیه پیچش (Convolution) :

اگر $L[f(t)] = F(s)$

اگر $L[g(t)] = G(s)$

$$* L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

$$* L\left[\int_0^t f(u)\, g(t-u)\right] = F(s) \cdot G(s)$$

* اگر لازم بود جزء به جزء برویم $g(t-u)\,du = dv$ و $f(u) = w$ را در نظر می گیریم .

۳س ـ دستگاههای معادلات دیفرانسیل :

از طرفین هر معادله لاپلاس می گیریم سپس یکی از لاپلاسها را حذف کرده، دیگری را محاسبه می کنیم و پس از بدست آوردن، آن را در معادله قرار می دهیم و تابع دوم را بدست می آوریم . « در محاسبات باید تا حد ممکن عبارات درجه ۲ و ۳ را تجزیه کنیم و فاکتورگیری های مناسب انجام دهیم . »

۴س ـ حل معادلات انتگرالی : همواره سعی می کنیم :

۱ـ معادله را به شکلی درآوریم که بتوان از طرفین لاپلاس گرفت .
۲ـ از قضیه پیچش استفاده می کنیم .

(مثال) ـ $g(t) = t + \int_0^t g(u)\sin(t-u)\, du$

$$L[g(t)] = L[t] + \underbrace{L\left[\int_0^t g(u)\sin(t-u)\, du\right]}_{F(s)\cdot G(s)}$$

$$L[y(t)] = \frac{1}{s^2} + \overset{F(s)}{L[y(t)]}\ \overset{G(s)}{L[\sin t]} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1+s^2} L[y(t)]$$

$$\Rightarrow \quad L[y(t)] = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{6} L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = t + \frac{1}{6} t^3$$

۳۵- (مهم) - اگر $f(t)$ تابع متناوب با دوره تناوب P باشد آنگاه :

$$* \quad L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt \quad *$$

* مثلاً اگر دورهٔ تناوب $P = 2a$ بود :

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\int_0^a \_\_\_\_ + \int_a^{2a} \_\_\_\_ \right]$$

یعنی دوره تناوب را خرد می کنیم .

۳۶- حل معادلات با سری های توانی -

جواب : $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر گرفته و y' و y'' را می یابیم . سپس همگی را در معادله نهاده و عامل x^n را در آنها ظاهر می کنیم و از آن فاکتور می گیریم .
با متحد صفر قرار دادن عبارتها یک یا چند شرط و معادلهٔ ریورسیبل را می یابیم . - سپس با مقدار دهی به n تمامی جملات خرد و ریز را بدست آورده باهم جمع می کنیم تا y بدست آید .

چکیده درس ریاضیات مهندسی

۱- سری فوریه عادی -

$$* \; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$* \; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$* \; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

۲- سری فوریه کسینوسی -

$$* \; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$* \; a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

« بسط به تابع زوج »

۳- سری فوریه سینوسی -

$$* \; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$* \; b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

« بسط به تابع فرد »

۴- سری فوریه مختلط -

$$* \; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}$$

$$* \; c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \, dx$$

۵- تبدیلات مختلط به سینوسی و کسینوسی -

$$* \; a_n = c_n + c_{-n}$$

$$* \; b_n = i \left(c_n - c_{-n}\right)$$

$$* \; c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \quad \text{و} \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} \quad \text{و} \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

۶- انتگرال فوریه -

$$* \; f(x) = \int_0^{\infty} \left(a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x\right) d\omega$$

$$* \; a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$* \; b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

۷- انتگرال فوریه کسینوسی -

$$* \; f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

$$* \; a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

« بسط به تابع زوج »

۸- انتگرال فوریه سینوسی -

$$* \; f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$* \; b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

« بسط به تابع فرد »

۹- انتگرال فوریه مختلط -

$$* \; f(x) = \int_0^{\infty} c(\omega) \, e^{i\omega x} \, d\omega$$

$$* \; c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx$$

۱۰- تبدیلات مختلط به سینوسی و کسینوسی -

$$* \; a(\omega) = C_\omega + C_{-\omega}$$

$$* \; b(\omega) = i \left(C_\omega - C_{-\omega} \right)$$

۱۱- تبدیل فوریه -

$$* \begin{cases} F[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx = \tilde{f}(\omega) \\ F^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega x} \, d\omega = f(x) \end{cases}$$

۱۲ـ تبدیل فوریه کسینوسی ـ «تابع زوج»

$$* \begin{cases} F_c[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx = \tilde{f}(\omega) \\ F_c^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}(\omega) \cos \omega x \, d\omega = f(x) \end{cases}$$

۱۳ـ تبدیل فوریه سینوسی ـ

$$* \begin{cases} F_s[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx = \tilde{f}(\omega) \\ F_s^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}(\omega) \sin \omega x \, d\omega = f(x) \end{cases}$$

۱۴ـ تبدیل فوریه مختلط ـ «چنین چیزی موجود نیست»

۱۵ـ حل مسئلهٔ ارتعاش تار به روش ضرب ـ

فوریه برای حل معادله $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ جواب $u(x,t)$ را به صورت حاصلضرب $F(x) \cdot G(t)$ در نظر گرفت و با قرار دادن آن در معادله، $F''(x) - KF(x) = 0$ و $\ddot{G}(t) - Kc^2 G(t) = 0$ را بدست آورد. معین می‌گردد که باید $K = -\mu^2 < 0$ باشد تا جواب غیرصفر حاصل شود. با ادامهٔ راه حل جواب حدسی و از آنجا جواب $u(x,t)$ بدست می‌آید.

۱۶ـ

$$* \begin{cases} c^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0,t) = 0 \quad \text{و} \quad u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \; G_n(t) \qquad \text{«جواب حدسی»}$$

$$* \; u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \; *$$

به کمک شرایط اولیه A_n و B_n را می‌یابیم.

۱۷- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t)=0$ و $u_x(l,t)=0$ باشد :

$$* \quad u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x \quad *$$

۱۸- حل دالامبر معادله موج -

$$* \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x) \qquad u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(l,t)=0 \end{cases}$$

معمولاً در مسائل دالامبر سرعت اولیه صفر است . در این روش تغییر متغیری به صورت $z=x-ct$ و $V=x+ct$ اعمال می‌کنیم تا $u(x,t)$ به $u(z,V)$ بدل شود. u_{tt} و u_{xx} را برحسب z و V محاسبه کرده و در معادله قرار می‌دهیم و نتیجه - می‌شود : $u_{zV}=0$. $u_z=\int u_{zV}\,dV=c(z)$ $\Leftarrow$

$\int u_z\,dz=\int c(z)\,dz+g(V)$ $\Leftarrow$ $u=h(z)+g(V)$ $\Leftarrow$

$u=h(x-ct)+g(x+ct)$ (h و g توابع دلخواه هستند)

(شرایط اولیه) $\Leftarrow$ $u=\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2}f(x+ct)$

(شرایط مرزی) $\Leftarrow$ $* \; u=\frac{1}{2}f^*(x-ct)+\frac{1}{2}f^*(x+ct) \; *$

$f^*(x)$: توسیع فرد و متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2l$.

۱۹-

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+h(x,t) \\ u(0,t)=g_1(t) \qquad u(x,0)=f(x) \\ u(l,t)=g_2(t) \qquad u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

* $u(x,t)=V+W$ که $V=V(x,t)$ و $W=W(x,t)$. اگر شرایط مرزی هر دو u : $V=ax+b$ - هر دو u_x : $V=ax^2+bx$ یکی u و یکی u_x : $V=ax^2+b$. اما در هر حال بهتر است اول

$T = ax + b$ را امتحان کنیم . با اعمال شرایط مرزی a و b و لذا $V(x,t)$ را می یابیم و آنگاه W_{tt} و W_{xx} را پیدا می کنیم (در ابتدا فرض کردیم $W(0,t)=0$ و $W(l,t)=0$ است) . $W(x,0)$ و $W_t(x,0)$ را هم به کمک شرایط اولیه می یابیم :

$$* \begin{cases} W_{tt} = c^2 W_{xx} + H(x,t) \\ W(0,t) = 0 \quad W(l,t) = 0 \\ W(x,0) = F(x) \quad W_t(x,0) = G(x) \end{cases}$$

* که جواب حدسی این معادله « $\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ »

* اگر شرایط مرزی هردو W_x بود جواب حدسی دارای $\cos \frac{n\pi}{l} x$ می شد یعنی :

« $\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$ »

* اگر $W_x(l,t)=0$ و $W(0,t)=0$: « $\sin \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{l} x$ »

* اگر $W(l,t)=0$ و $W_x(0,t)=0$: « $\cos \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{l} x$ »

جواب حدسی را در معادله قرار می دهیم :

$$\ddot{G}_n(t) + P_n G_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l H(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

« $G_n(t) = G_g + G_p$ » و G_g را از روی حقیقی ، مکرر یا موهومی بودن ریشه های معادله شاخص می یابیم و G_p را از فرمول $y'' + ay' + by = f(x)$ و از روی شکل $f(x)$ ($P_m(x)$ یا $P_m(x) e^{\alpha x}$ یا $P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$ یا – $e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$) می یابیم .

جواب حاصل برای $G_n(t)$ دارای ضرایب A_n و B_n است که به کمک شرایط اوّلیه - این ضرایب را می یابیم لذا $W(x,t)$ معلوم می شود و $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

۲ - معادلهٔ گرما -

$$* \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = h(x,t) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(l,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

** $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ را در نظر می گیریم به قسمی که $W(0,t) = 0$ و $W(l,t) = 0$ باشد آنگاه $V(x,t)$ را به صورت $ax + b$ یا $ax^2 + bx$ (اگر شرایط مرزی هردو u_x بود) یا $ax^2 + b$ (یکی u و یکی u_x بود) در نظر می گیریم و به کمک شرایط مرزی a و b و لذا $V(x,t)$ را می یابیم. سپس W_t و W_{xx} و $W(x,0)$ را می یابیم تا دستگاه ذیل حاصل شود :

$$* \begin{cases} W_t - c^2 W_{xx} = H(x,t) \\ W(0,t) = 0 \\ W(l,t) = 0 \\ W(x,0) = F(x) \end{cases}$$

* جوابهای حدسی به صورتهای زیر خواهد بود :

الف - اگر شرایط مرزی $u(0,t) = 0$ و $u(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

ب - اگر شرایط مرزی $u_x(0,t) = 0$ و $u_x(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

ج - اگر شرایط مرزی $u(0,t) = 0$ و $u_x(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{(2n-1)}(t) \sin \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{l} x$$

د- اگر شرایط مرزی $u_x(0,t)=0$ و $u(l,t)=0$ باشد:

$$\sum_{n=}^{\infty} G_{(2n-1)}(t)\ \cos\frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{l}x$$

* سپس جواب حدسی را در معادله قرار می‌دهیم و به معادلهٔ دیفرانسیلی به شکل $G'_{(2n-1)}t + A(t)\,G_{(2n-1)}t = B(t)$ می‌رسیم که جواب آن به فرم ذیل است:

$$* \quad G_{2n-1} = e^{-\int A(t)\,dt}\left[\int e^{\int A(t)\,dt}\cdot B(t)\,dt + C_{2n-1}\right]$$

G_{2n-1} را که یافته‌ایم در $W(x,t)$ قرار می‌دهیم و به کمک $W(x,0)=F(x)$ ضریب C_{2n-1} را می‌یابیم. حال $W(x,t)$ و لذا $u(x,t)$ معلوم شده است.

۲۳- نکته - در حل ضربی معادلات گرما برای بحث روی علامت K از عبارت $\frac{G'(t)}{c^2G(t)}=K$ و استدلال فیزیکی آن استفاده می‌کنیم.

۲۴- معادله گرما در میله نامتناهی عایق بندی شده -

$$*\begin{cases} u_t = c^2u_{xx} & -\infty<x<\infty \quad t>0 \\ u(x,0)=f(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

* به کمک $\frac{G'(t)}{c^2G(t)}=K$ می‌یابیم $G(t)=Ae^{c^2Kt}$ و با استدلال فیزیکی داریم:

$G_\omega(t)=A(\omega)e^{-c^2\omega^2t}$ $\quad (K=-\omega^2<0)$ و $F_\omega(x)=A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x$

ولذا جواب حتمی $u_\omega(x,t)=F_\omega(x)\cdot G_\omega(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\,e^{-c^2\omega^2t}\,d\omega$$

* به کمک $u(x,0)=f(x)$، $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را می‌یابیم.

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۴۲

۳۳- معادله گرما در میله نیمه نامتناهی عایق بندی شده با شرط مرزی همگن :

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0<x<\infty \quad t>0 \\ u(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

* جواب حتمی $u(x,t) = \int_0^\infty B(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} \sin\omega x \, d\omega$ است که به کمک $u(x,0) = f(x)$ ، $B(\omega)$ را می یابیم.

نکته - اگر شرط مرزی $u_x(0,t) = 0$ باشد جواب حتمی بصورت زیر است:

$$« \; u(x,t) = \int_0^\infty B(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} \cos\omega x \, d\omega \; »$$

۳۴- معادله گرما در میله نیمه نامتناهی عایق بندی شده با شرط مرزی ناهمگن و مولدهای گرمائی $h(x,t)$ -

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t) & 0<x<\infty \quad t>0 \\ u(0,t) = g(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

** $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ را طوری در نظر می گیریم که $W(0,t) = 0$ شود و آنگاه $V(x,t)$ را به صورت (b) یا (ax) (اگر $u_x(0,t)$ داشته باشیم) یا $ax+b$ یا ax^2+bx یا ax^2+b در نظر گرفته و با سعی و خطا a و b را می یابیم. W_t و W_{xx} و $W(x,0)$ را می یابیم :

$$* \begin{cases} W_t = c^2 W_{xx} + H(x,t) \\ W(0,t) = 0 \\ W(x,0) = F(x) \end{cases}$$

* جواب حدسی به صورت زیر خواهد بود :

الف- اگر شرط مرزی $W(0,t)=0$ باشد : $W(x,t)=\int_0^\infty G(t)\sin\omega x\,d\omega$

ب - اگر شرط مرزی $W_x(0,t)=0$ باشد : $W(x,t)=\int_0^\infty G(t)\cos\omega x\,d\omega$

* این جواب را در معادله قرار می دهیم و به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم :

* $G'(t)+c^2\omega^2 G(t)=K(t,\omega)$

* که جواب آن : $G(t)=A(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}+G_p$
است که $(A(\omega)e^{-c^2\omega^2 t})$ جواب عمومی بدون طرف ثانی و G_p - جواب خصوصی با طرف ثانی است . به کمک $W(x,0)$ ، $A(\omega)$ را هم می یابیم پس $W(x,t)$ و از آنجا $u(x,t)$ بدست می آید .

۱۲- مسئله گرمایش میله بدون عایق - * $u_t=c^2u_{xx}-hu$ *
($h=\text{Const}$ بستگی به جنس محیط اطراف دارد)

* تغییر متغیر « $u(x,t)=e^{-ht}W(x,t)$ » را اعمال می کنیم :

$$u_t=-he^{-ht}W(x,t)+e^{-ht}W_t(x,t)$$
$$u_{xx}=e^{-ht}W_{xx}(x,t)\quad\Rightarrow$$

$$W_t=c^2W_{xx}$$

نکته - اگر شرط مرزی ناهمگن بود اوّل آن را برحسب تغییر متغیر-

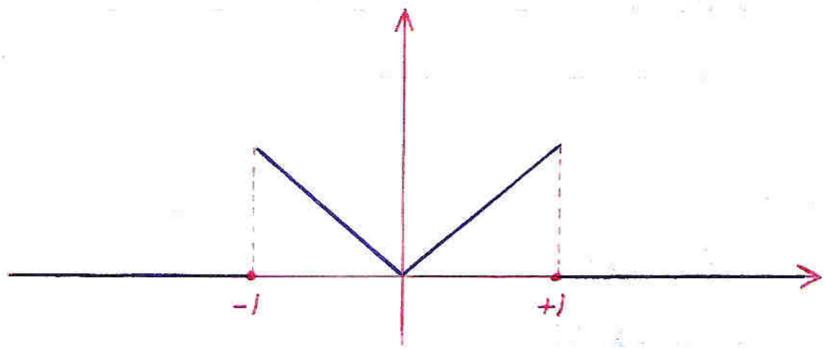
جدید می یابیم و سپس شرط مرزی را همگن می کنیم .

۳۶ـ نکته ـ در حل معادلات گرما اگر معادله ناهمگن بود و شرط مرزی هم نداشتیم در صورت امکان شکل تابع را رسم می کنیم و اگر زوج بود از $\cos$ واگر فرد بود از $\sin$ استفاده می کنیم .

مثال ـ

$$* \quad u_t - \varepsilon u_{xx} = \begin{cases} 2t & |x| < R \\ 0 & |x| > R \end{cases}$$

$$* \quad u(x,0) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



* « تابع زوج است » $\Leftarrow$ « $u(x,t) = \int_0^\infty G(t) \cos \omega t \, d\omega$ »

۳۷ـ مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیل شکل ـ

$$* \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) & \\ u(0,y,t) = 0 \quad و \quad u(a,y,t) = 0 & 0 \leqslant y \leqslant b \\ u(x,0,t) = 0 \quad و \quad u(x,b,t) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant a \\ u(x,y,0) = f(x,y) & \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) & \end{cases}$$

* $u(x,y,t) = F(x) \cdot H(y) \cdot G(t)$ را در نظر گرفته و u_{tt} و u_{xx} و u_{yy}
را می یابیم که پس از جایگذاری در معادله داریم : $\frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{H''(y)}{H(y)}$

* حال $\frac{F''(x)}{F(x)} = M$ و $\frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = K$ و $\frac{H''(y)}{H(y)} = K - M$ در نظر می گیریم.

* به کمک شرایط مرزی : $H(0) = 0$ و $H(b) = 0$ $\quad F(0) = 0$ و $F(a) = 0$

* در معادله $F''(x) - M F(x) = 0$ با استدلالی مشابه قبل $M = -\lambda^2 < 0$
است و $F(x) = A(n) \cos \lambda x + B_n \sin \lambda x$ که اگر $F(0) = 0$ و $F(a) = 0$
را اعمال کنیم $\lambda a = n\pi$ و $\left(\lambda = \frac{n\pi}{a}\right)$ است و لذا :
$F_n(x) = B(n) \sin \frac{n\pi}{a} x$ ($B(n)$ را یک فرض می کنیم) .

* در معادله $H''(y) - (K-M) H(y) = 0$ به طریق مشابه $(K-M) = -\mu^2 < 0$
و $H(y) = A(m) \cos \mu y + B(m) \sin \mu y$ که اگر $H(0) = 0$ و $H(b) = 0$
را اعمال کنیم $\mu b = m\pi$ و $\left(\mu = \frac{m\pi}{b}\right)$ و لذا :
$H_m(y) = B(m) \sin \frac{m\pi}{b} y$ ($B(m)$ را یک فرض می کنیم) .

* در معادلهٔ $\ddot{G}(t) - K c^2 G(t) = 0$ $\quad K = (-\lambda^2 - \mu^2) = -\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)$
$= -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$

* پس $\ddot{G}(t) + \lambda_{nm}^2 G(t) = 0$ که در آن :

$$\boxed{\lambda_{nm} = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}}$$

* که جواب آن : $G_{nm}(t) = A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t$

$$\Rightarrow \quad u_{nm}(x,y,t) = (A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

(Super position) $\Rightarrow$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۴۰۰-۱۰
شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۱۰۴

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\cos\lambda_{nm}t+B_{nm}\sin\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$$

* به کمک شرایط اولیه A_{nm} و B_{nm} را می یابیم :

$$\begin{cases} A_{nm}=\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\;dy\,dx \\ B_{nm}=\dfrac{4}{ab\,\lambda_{nm}}\displaystyle\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\;dy\,dx \end{cases}$$

۲۸ـ نکته ـ

الف ـ $u_x(0,y,t)=0$ و $u_x(a,y,t)=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}$ و $\cos\frac{n\pi}{a}x$

ب ـ $u_y(x,0,t)=0$ و $u_y(x,b,t)=0$: $\sum_{m=0}^{\infty}$ و $\cos\frac{m\pi}{b}y$

۲۹ـ اگر شکل مرز دایره‌ای باشد از مختصات قطبی استفاده می کنیم :

$$u(x,y,t)\rightarrow u(r,\theta,t)$$

$$*\quad u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\quad *$$

۳۰ـ اگر شکل مرز استوانه ای باشد از مختصات استوانه‌ای کمک می گیریم :

$$u(x,y,z,t)\rightarrow u(r,\theta,z,t)$$

$$*\quad \nabla^2u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}\quad *$$

۳۱ـ در مختصات کروی :
$u(x,y,z,t) = u(\rho,\varphi,\theta,t)$

$$* \quad \nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad *$$

۳۲ـ قضیه پیچش ـ

$$f * g\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

$$F[f(x)] = F(\omega) \quad , \quad F[g(x)] = G(\omega)$$

$$F[f*g] = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

$$F^{-1}[F(\omega) \cdot G(\omega)] = f*g\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

۳۳ـ

$$F[u_{xx}(x,t)] = -\omega^2\, U(\omega,t)$$

$$F[u_t(x,t)] = U_t(\omega,t)$$

$$F[u_{tt}(x,t)] = U_{tt}(\omega,t)$$

۳۴ـ حل معادلات نامتناهی با تبدیل فوریه ـ

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \qquad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$F[u_t] = c^2 F[u_{xx}]$$

$$U_t(\omega,t) = -c^2\omega^2\, U(\omega,t) \Rightarrow U_t(\omega,t) + c^2\omega^2\, U(\omega,t) = 0$$

$$\left(y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx} \cdot Q(x) \cdot dx\right] \right) \Rightarrow U(\omega,t) = A(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$F[u(x,0)] = U(\omega,0) = A(\omega) = F[f(x)] = F(\omega)$$

$$\Rightarrow U(\omega,t) = F(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t} \Rightarrow u(x,t) = F^{-1}[U(\omega,t)] = f*g$$

۳۵ـ برای حل معادلات متناهی از تبدیلات فوریه سینوسی یا کسینوسی استفاده می کنیم . اگر شرایط مرزی u بود از تبدیل فوریه سینوسی واگر u_x بود از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می کنیم .

$$F_s[u_{xx}] = \frac{2}{l}\left[\frac{n\pi}{l}(-1)^{n+1}u(l,t) + \frac{n\pi}{l}u(0,t)\right] - \frac{n^2\pi^2}{l^2}U(n,t)$$

$$F_c[u_{xx}] = \frac{2}{l}\left[(-1)^n u_x(l,t) - u_x(0,t)\right] - \frac{n^2\pi^2}{l^2}U(n,t)$$

۳۶ـ

$$F_s(f(x)) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \tilde{F}_s(n)$$

$$F_c(f(x)) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = \tilde{F}_c(n)$$

$$F_s^{-1}(\tilde{F}_s(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$F_c^{-1}(\tilde{F}_c(n)) = \frac{\tilde{F}_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_c(n)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

۳۷ـ حل معادلات با تبدیل لاپلاس ـ

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

$$L[u_t] = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$L[u_{tt}] = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$** \begin{cases} u_{tt} = c^2u_{xx} + h(x,t) & 0<x<\pi \quad t\geq 0 \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(\pi,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

* اولاً باید $h(x,t)$ برحسب t تبدیل لاپلاس داشته باشد :

$$\left(\exists M : \ |h(x,t)| \leqslant M e^{-\alpha t} \right)$$

$$s^2 U(x,s) - s\,\cancel{U(x,0)} - \cancel{U_t(x,0)} = c^2 U_{xx}(x,s) + H(x,s)$$

$$U_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{c^2} U(x,s) = \frac{-1}{c^2} H(x,s)$$

$$U(x,s) = A(s)\, e^{-\frac{s}{c}x} + B(s)\, e^{\frac{s}{c}x} + U_p(x,s)$$

* از طرفین شرایط مرزی لاپلاس گرفته و اعمال می کنیم :

$$« \ U(0,s) = G_1(s) \qquad U(L,s) = G_2(s) \ »$$

* از این طریق $A(s)$ و $B(s)$ و سپس $U(x,s)$ را می یابیم و آنگاه در صورت وجود تبدیل معکوس لاپلاس می گیریم .

---

۳۸ - چند تبدیل لاپلاس -

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L(t) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{s^n}$$

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$L(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$L\left(\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{(s-a)^n}$$

$$L\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$L\left(\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}\right) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$$

$$L\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right) = \frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$L(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

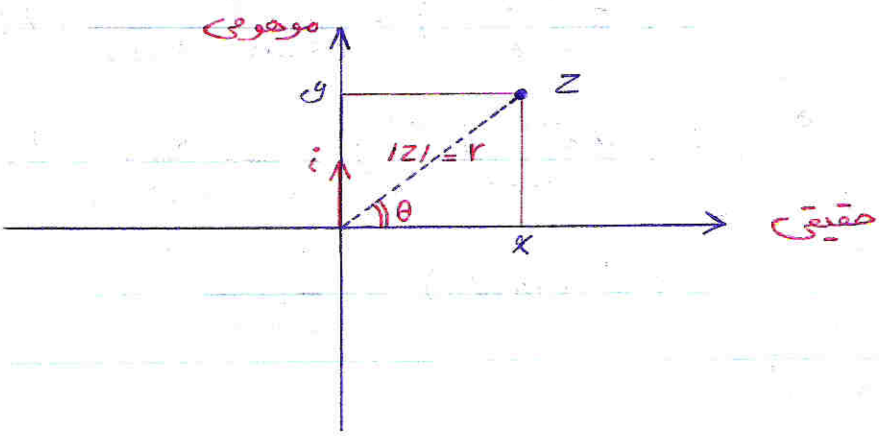
$$L\left(\frac{1}{a}\sinh at\right) = \frac{1}{s^2-a^2}$$

$$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

« توابع مختلط »

۳۹ـ تعاریف و روابط ـ

* $i^2 = -1$
* $Z = x + iy = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |Z|e^{i\theta}$
* $|Z| = r =$ هنگ (Z) یا مُدول
* $\theta =$ آرگومان (Z)
* $-\pi < \theta \leqslant \pi \rightarrow Arg\, Z$ آرگومان اصلی
* $\bar{Z} = x - iy$ مزدوج (Z)
* $Re\, z = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$
* $Img\, z = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
* $|Z| = |\bar{Z}|$
* $|Z|^2 = Z\bar{Z}$
* $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$
* $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ « اتحاد اولر »
* $|e^{i\theta}| = 1$
* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ « قانون دموآر »
* $|Z - Z_0|$ فاصله (Z) تا (Z_0)
* $arg\, z - Arg\, z = 2k\pi$



۴۰ - برخی از معادلات مختلط -

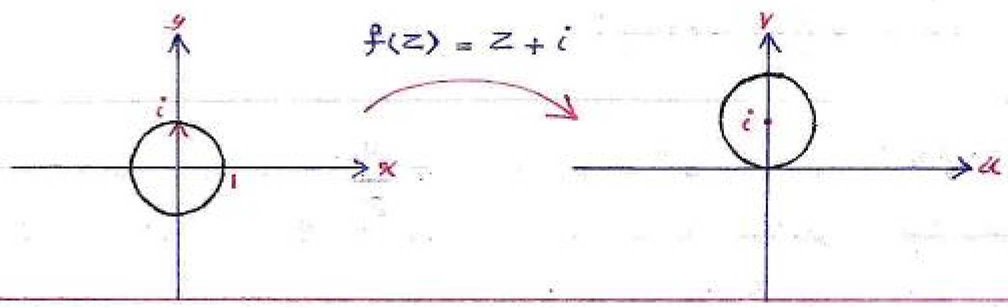
* معادلهٔ دایره به مرکز مبداء و شعاع a: $|z| = a$ (یا) $z = ae^{i\theta}$
* معادلهٔ دایره به مرکز (z_0): $|z-z_0| = a$ (یا) $z = z_0 + ae^{i\theta}$
* همسایگی نقطهٔ z_0 به شعاع $\varepsilon > 0$: $|z-z_0| < \varepsilon$
* قرص واحد: $|z| < 1$
* معادلهٔ بیضی: $|z-z_0| + |z-z_1| = 2a$
* معادلهٔ عمود منصف: $|z-z_0| = |z-z_1|$

۴۱ - نگاشت انتقال -

$$f(z) = z \pm z_0$$

انتقالی به اندازه بردار (z_0) می دهد.

مثال -

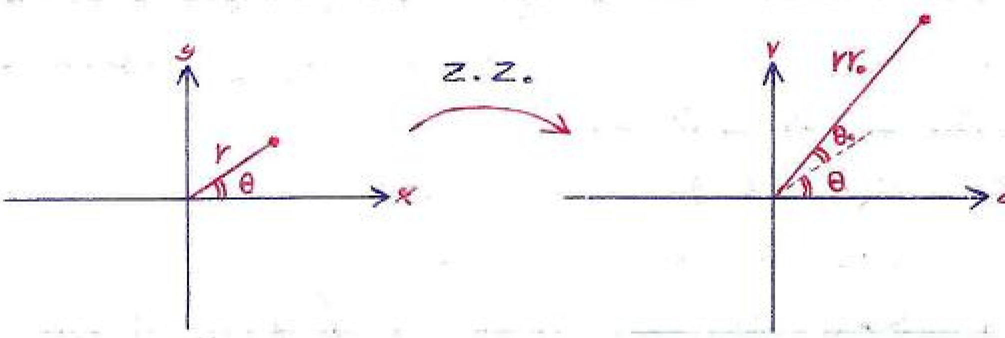


۴۲ - نگاشت ضرب -

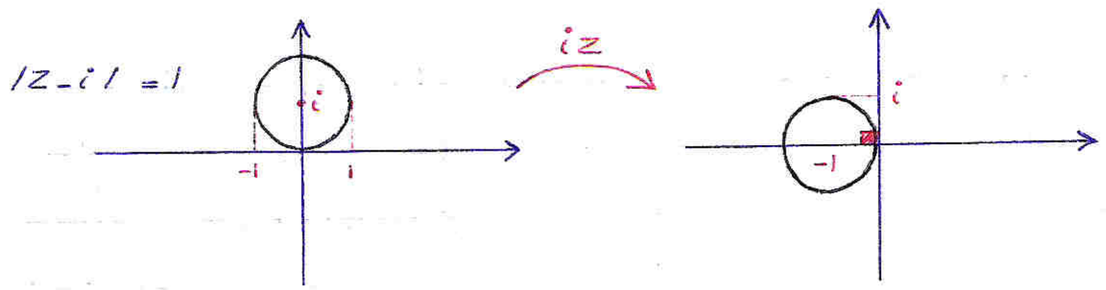
$$f(z) = z \cdot z_0$$

$$(z = re^{i\theta} \quad , \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}) \Rightarrow$$

$$W = z \cdot z_0 = rr_0 e^{i(\theta+\theta_0)} \Rightarrow \begin{cases} |W| = rr_0 \\ \arg W = \theta + \theta_0 \end{cases}$$



۴۳ـ نگاشت $f(z) = iz$ ـ دوران به اندازهٔ $(\frac{\pi}{2})$ می دهد.



$|z-i| = 1$ و $W = iz$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{W}{i} - i\right| = 1$

$\Rightarrow$ $\left|\frac{W+1}{i}\right| = 1$ $\Rightarrow$ $|W+1| = |i| . 1 = 1$

۴۴ـ نگاشت $f(z) = iz + b$ ـ دوران به اندازه $(\frac{\pi}{2})$

انتقال به اندازه بردار (b)

۴۵ـ نگاشت $f(z) = \frac{2iz}{z_0} + i$

مثال:
* تجانس $K = |z_0| = 2$
* دوران $\arg z_0 = \frac{\pi}{2}$
* انتقال i

$|z_0| > 1$ تابع انبساط

$|z_0| < 1$ تابع انقباضی

۴۶ـ نگاشت معکوس: $W = \frac{1}{z}$ تحت این نگاشت همواره خط یا دایره به خط یا دایره می رود. این نگاشت نقاط داخل دایره را به خارج دایره و بالعکس می برد.

$$\begin{cases} A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \\ A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0 \end{cases}$$

الف ـ دایره از مبداء بگذرد $D = 0$ ← نقش آن خط است.

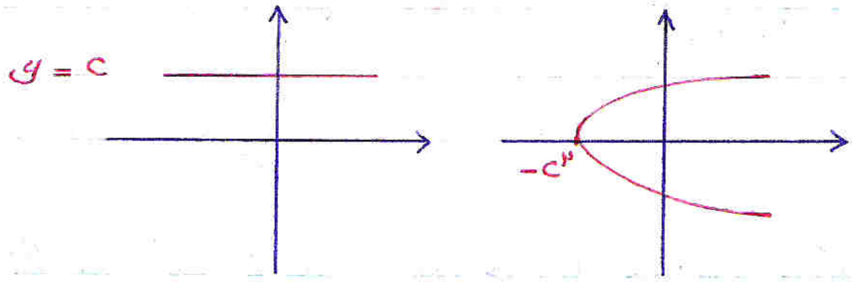
ب - دایره‌ای که از مبداء نگذرد $D \neq 0$ ← نقش آن دایره است.

ج - خطی که از مبداء بگذرد $A = 0$ $D = 0$ ← نقش آن خطی است گذرنده از مبداء.

د - خطی که از مبداء نگذرد $A = 0$ $D \neq 0$ ← نقش آن دایره گذرنده از مبداء است.

---

۴۷ - نگاشت $W = Z^2$ -



* به فرض می‌خواهیم ببینیم خط $y = c$ را به کجای برد :

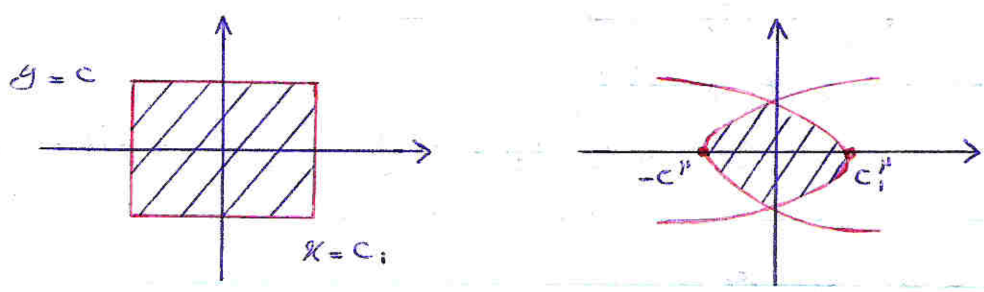
* $W = Z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - c^2 \\ v = 2cx \end{cases}$ « معادله پارامتری نقش خط $y = c$ »

$x = \frac{v}{2c} \Rightarrow u + c^2 = + \frac{v^2}{4c^2}$

محور سهمی — مبداء سهمی $(-c^2)$ — جهت دهانه سهمی.

* پس :



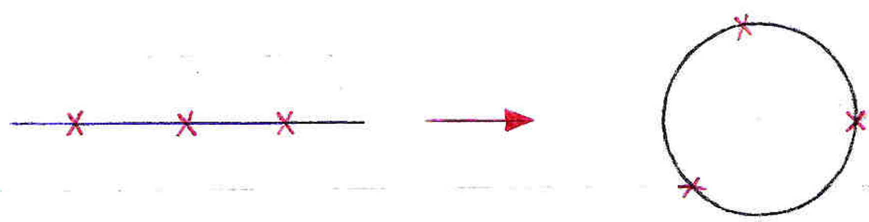
۴۸ـ نگاشت خطی کسری ـ $W = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$

تحت این نگاشت همواره نقش خط یا دایره ، خط یا دایره خواهد بود :

$* \quad W = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\times\frac{1}{cz+d}$ (انتقال ، دوران ، تجانس ، معکوس)

۴۹ـ نگاشت موبیوس ـ $\frac{W-W_1}{W-W_3}\cdot\frac{W_2-W_3}{W_2-W_1} = \frac{Z-Z_1}{Z-Z_3}\cdot\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$

این نگاشت یک ناحیه نامتناهی را بیچانده به یک ناحیه متناهی می برد .
حداکثر یکی از نقاط در بین Z ها و یکی در بین W ها می توانند نقطه در ∞ باشد
که جمله مربوط به آن حذف می شود .



۵۰ـ نگاشت دوران ـ تجانس ـ $W = \underbrace{r_0 e^{i\theta_0}}_{Z_0} Z$

تجانس : $K = r_0 = |Z_0|$

دوران : $\varphi = \theta_0 = \arg Z_0$

۵۱ـ نگاشت $W = e^Z$ ـ نوار بین $-\pi i$ و πi را به کل صفحه (u,v) می برد و به طور کلی هر نوار را به یک قطاع می برد . این تابع یک تابع تام است .

$$* \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

۵۲- نکته - (معادلات کشی - ریمان قطبی)

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$
$$-\frac{1}{r} u_\theta = v_r$$

* اگر v و u و v_x و v_y و u_x و u_y پیوسته باشند و در معادلات کشی ریمان صدق کنند تابع $z = u + iv$ مشتق پذیر (تحلیلی) است و مشتق آن :

$$* \; f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

* اگر v و u و v_r و v_θ و u_r و u_θ پیوسته باشند و در معادلات کشی ریمان قطبی صدق کنند تابع $z = u + iv$ مشتق پذیر (تحلیلی) است و مشتق آن :

$$* \; f'(z) = e^{-i\theta} (u_r + i v_r)$$

۵۳- نگاشت $\ln z$ -

$$\ln z = \ln r + i \, Arg\, z \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi$$

$$* \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

این نگاشت هر قطاع را به یک نوار می برد .
$\ln z$ در همه صفحه مختلط به جز محور حقیقی منفی و مبداء مشتق پذیر (تحلیلی) است .

۵۴- نگاشت $w = \sin z$ و $w = \cos z$ -

توابع $\sin z$ و $\cos z$ هر دو تام هستند و همچنین توابع متناوب می باشند که $T = 2\pi$ است . سه فرمول زیر مهم است :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin ix = i \sinh x \\ \cos ix = \cosh x \end{cases}$$

$$* \; W = \sin z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ V = \cos x \sinh y \end{cases}$$

$$* \; W = \cos z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ V = \sin x \sinh y \end{cases}$$

یک چند بکودکی به استاد شدیم
یک چند به استادی خود شاد شدیم
پایان سخن شنو که ما را چه رسید
از خاک درآمدیم و بر باد شدیم

روش حل معادلات دیفرانسیل مورد استعمال در ریاضی مهندسی

I) معادلات خطی مرتبه اوّل (همگن و ناهمگن) :

* صورت کلی : $G^{\cdot}(t) + P(t)\,G(t) = Q(t)$

* این معادلات بطور کلی با فرمول زیر حل می شوند :

$$\boxed{G(t) = e^{-\int P(t)\,dt}\left[\,e^{\int P(t)\,dt} \cdot Q(t) \quad + C\right]}$$

II) معادلات مرتبه دوّم :

* صورت کلی : $G^{\cdot\cdot}(t) + P\,G^{\cdot}(t) + Q\,G(t) = H(t)$
$(P , Q = Constant)$

* جواب این معادله بصورت « $G(t) = G_g + G_p$ » می باشد که در آن ، G_g جواب عمومی حالت همگن یا بدون طرف ثانی ($H(t) = 0$) بوده و G_p - جواب خصوصی حالت ناهمگن یا باطرف ثانی ($H(t) \neq 0$) است .

* برای یافتن G_g ابتدا فرض می کنیم $G^{\cdot\cdot}(t) + P G^{\cdot}(t) + Q\,G(t) = 0$. جوابهای این معادله بصورت کلی ($G = e^{mt}$) است . لذا معادلهٔ شاخص را -

تشکیل داده و ریشه های آن را می یابیم $(m^2 + Pm + Q = 0)$. بسته به نوع ریشه ها سه شکل جواب داریم :

الف - اگر m_1 و m_2 هردو حقیقی باشند :

$$* \quad \left(G(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}\right)$$

ب - اگر $m_1 = m_2 = \frac{-P}{2}$ ریشه مکرر باشد :

$$* \quad \left(G(t) = Ae^{-\frac{P}{2}t} + Be^{-\frac{P}{2}t}\right)$$

ج - $m = \alpha \pm bi$ ریشهٔ مختلط باشد :

$$* \quad \left(G(t) = Ae^{at}\cos bt + Be^{at}\sin bt\right)$$

---

* برای یافتن G_p معادله را به فرم $\ddot{G}(t) + P\dot{G}(t) + QG(t) = H(t)$ در نظر می گیریم که بسته به شکل عبارت $H(t)$ چهار حالت داریم :

---

1 - اگر $H(t) = P_m(t)$ (یعنی یک چند جمله ای درجهٔ m برحسب t) باشد دو حالت داریم :

الف - اگر صفر ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* \quad G_p = \tilde{P}_m(t)$$

ب - اگر صفر ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* \quad G_p = t^S \tilde{P}_m(t)$$

---

2 - اگر $H(t) = e^{\alpha t} P_m(t)$ باشد ، دو حالت داریم :

الف- اگر α ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* \; G_p = e^{\alpha t} \, \tilde{P}_m(t)$$

ب- اگر α ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* \; G_p = t^S e^{\alpha t} \, \tilde{P}_m(t)$$

3- اگر $H(t) = P_m(t) \cos\beta t + Q_n(t) \sin\beta t$ باشد دو حالت داریم :

الف- $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* \; G_p = \tilde{P}_K(t) \cos\beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin\beta t \qquad K = \mathrm{Max}(m, n)$$

ب- اگر $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* \; G_p = t^S \left(\tilde{P}_K(t) \cos\beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin\beta t \right) \qquad K = \mathrm{Max}(m, n)$$

4- اگر $H(t) = e^{\alpha t} \left(P_m(t) \cos\beta t + Q_n(t) \sin\beta t \right)$ باشد :

الف- اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* \; G_p = e^{\alpha t} \left(\tilde{P}_K(t) \cos\beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin\beta t \right) \qquad K = \mathrm{Max}(m, n)$$

ب- اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* \; G_p = t^S e^{\alpha t} \left(\tilde{P}_K(t) \cos\beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin\beta t \right) \qquad K = \mathrm{Max}(m, n)$$

* در کلیه حالات فوق منظور از $\tilde{P}_m(t)$ و $\tilde{Q}_n(t)$ عباراتی هستند متناظر با $P_m(t)$ و $Q_n(t)$، امّا با ضرایب نامعین. مثلاً اگر $(P_5(t) = t^5 + 3t^2 - 8)$ آنگاه: $(\tilde{P}_5(t) = At^5 + Bt^2 + C)$.
که ما این جوابهای بدست آمده برای G_P را داخل معادله قرار میدهیم و ضرایب را تعیین می‌کنیم و لذا (G_P) بدست می‌آید.

* وقتی که G_g و G_P بدست آمد داریم:

$$G(t) = G_g + G_P$$

چکیده درس محاسبات عددی

1- گرد کردن -

* اگر عدد بعدی کوچکتر از 5 بود حذف می‌شود.
* اگر عدد بعدی بزرگتر از 5 بود حذف شده و یکی به رقم قبلی اضافه می‌شود.
* اگر عدد بعدی 5 بود سه حالت دارد:
  - a- اگر رقم قبل از 5 زوج باشد 5 را حذف می‌کنیم.
  - b- اگر رقم قبل از 5 فرد باشد 5 را حذف کرده و یکی به رقم قبل می‌افزاییم.
  - c- اگر رقم قبل از 5 زوج باشد امّا پس از 5 رقم غیر صفر داشته باشیم 5 را حذف کرده یکی به رقم قبل می افزاییم.

* $2.743 = 2.74 \ (3S)$
* $2.746 = 2.75 \ (3S)$
* $2.745 = 2.74 \ (3S)$
* $2.735 = 2.74 \ (3S)$
* $2.745000102 = 2.75 \ (3S)$

* $0.0033333 = 3.33 \times 10^{-3}$
* $0.066666 = 6.67 \times 10^{-2}$

2- خطاها -

الف- خطای مطلق

* $e(a) = |A - a|$

ب- خطای مطلق حدّی

* $a - e(a) \leqslant A \leqslant a + e(a)$

$A = a \pm e(a)$

(در این مورد محدوده A معین است ولذا می‌توان A را مشخص نمود.)

ج- خطای نسبی

* $\delta(a) = \dfrac{|A-a|}{|A|} = \dfrac{e(a)}{|a|}$

(مانند مثال دوتا پیپسی)

خطای جمع - دقت حاصل جمع به نادقیقترین دقت بستگی دارد.

1- $e(a+b) \leq e(a) + e(b)$

2- $\delta(a+b) \leq Max\left(\delta(a) , \delta(b)\right)$

خطای تفریق - حتی المقدور باید از تفریق اعداد تقریبی نزدیک به هم احتراز کرد.

1- $e(a-b) \leq e(a) + e(b)$

2- $\delta(a-b) \leq \frac{e(a-b)}{|a-b|}$

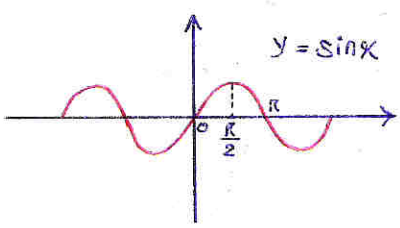
خطای ضرب - باید از ضرب اعداد تقریبی بزرگ درهم خودداری نمود. اگر $1 \leq |a|, |b|$ باشد می توان اعداد را با خیال راحت درهم ضرب کرد.

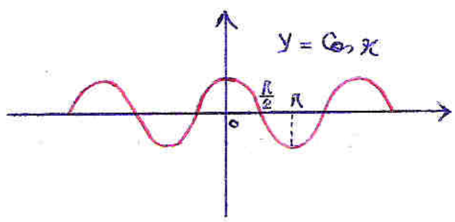
1- $e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a)$

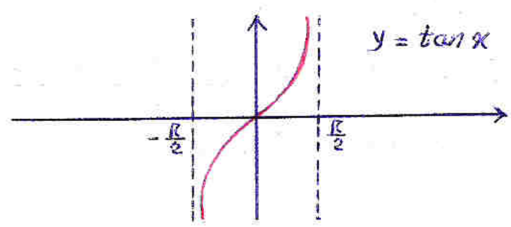
2- $\delta(ab) \leq \delta(a) + \delta(b)$

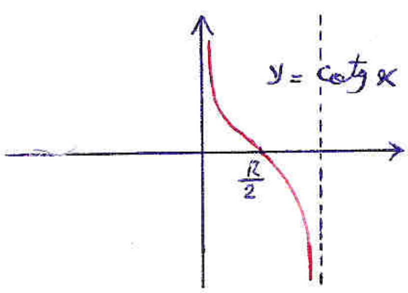
3- حل عددی $f(x) = 0$ -

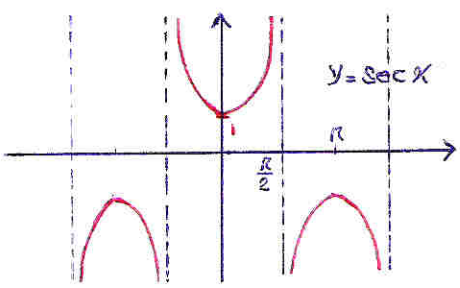
الف - رسم نمودار- می توان نمودار تابع را رسم کرد و محل تقریبی ریشه ها را بدست آورد. اگر $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ را داشته باشیم دو منحنی را در یک دستگاه رسم می کنیم و نقاط تلاقی را روی محور x ها تصویر می کنیم.

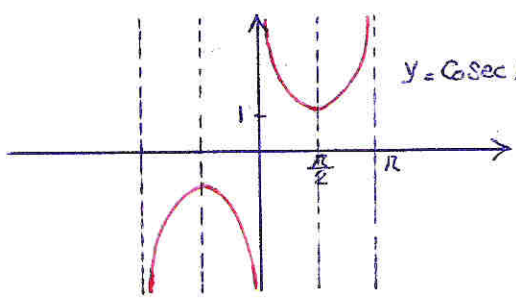


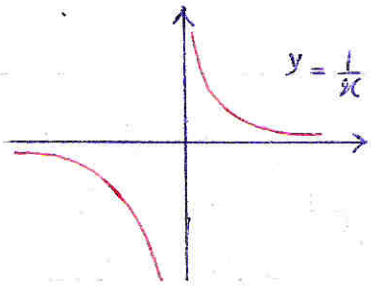


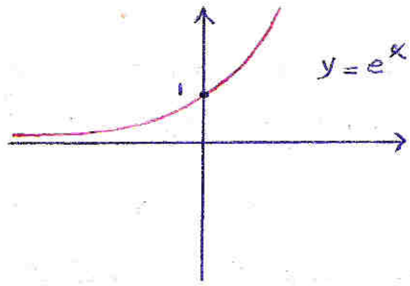


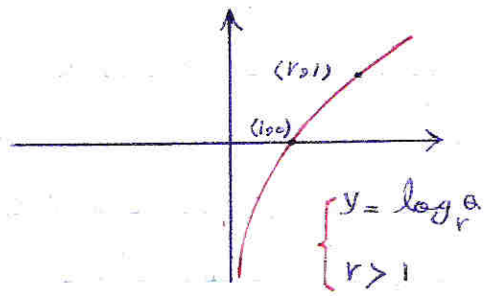


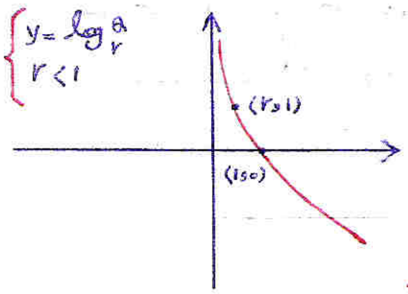












ب - روش دو بخشی (تنصیف) - باید $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a)\,f(b)<0$ باشد. در این صورت طبق جدول زیر عمل می کنیم و در هر مرحله علامت $f(a)\,f(x)$ را بررسی می کنیم که اگر + بود $x=\frac{a+b}{2}$ را برای مرحله بعدی در a می ریزیم و اگر (-) بود در b می ریزیم. $|f(x_n)|<\varepsilon$ یا $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ یا $n=m$ معیارهای توقف هستند.

n	a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	$\lvert f(x_n)\rvert<\varepsilon$ / $\lvert x_{n+1}-x_n\rvert<\varepsilon$	علامت $f(a)\,f(x)$

نکته - برای توابعی که شامل مثلثاتی هم می شوند از مُد (رادیان) ماشین حساب استفاده می کنیم.

ج - روش نابجائی - تمام شرایط و اعمال مانند روش دوبخشی است با این تفاوت که بجای $x=\frac{a+b}{2}$ از $x=\frac{a\,f(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}$ استفاده می کنیم. سرعت همگرائی این روش هم از تنصیف بیشتر است.

د- روش تکرار ساده - در این روش $f(x)=0$ را به صورت $x = g(x)$ در می‌آوریم - بگونه‌ای که در یک همسایگی از ریشه $|g'(x)| < 1$ باشد و آنگاه x_0 را نزدیک ریشه اختیار می‌کنیم (یا به ما می‌دهند) و با فرمول $x_{n+1} = g(x_n)$ به ریشه نزدیک می‌شویم. اگر $|g'(x)|$ به (0) نزدیک باشد همگرائی کند است و اگر $g'(x)$ منفی باشد ارقام مربوط به اندیسهای زوج و فرد از دو طرف به ریشه نزدیک - می‌شوند. اگر $g'(\alpha) = 0$ باشد روش تکرار ساده حداقل از مرتبه دوم است.
برای توابع مثلثاتی از مُد رادیان استفاده می‌شود.

ه- روش نیوتن - $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ معادله تکرار روش نیوتن است که باید x_0 را نزدیک به ریشه بگیریم. شرط همگرائی این است که $|g'(x)|<1$ باشد.
همگرائی روش نیوتن (2) است لذا هربار تعداد ارقام اعشاری یا معنی ۲ برابر - می‌شود و باید رقم بعدی را گرد کرد.

$$|g'(x)| < 0 \longrightarrow \left| \frac{f(x)\, f''(x)}{f'^{2}(x)} \right| < 0$$

اشکال 1 - نیاز به x_0 نزدیک ریشه دارد.
رفع اشکال - فرض می‌کنیم $\alpha \in [a, b]$. x_1 تا x_4 را به روش دو بخشی یا نابجائی محاسبه کرده و x_4 را x_0 روش نیوتن می‌گیریم و تست می‌کنیم. اگر x_1 بدست - آمده در $[a, b]$ بود روش نیوتن را ادامه می‌دهیم وگرنه روش دوبخشی را ادامه می‌دهیم تا x_0 بدست آید. (باید در $\alpha \in [a, b]$ ، $(b-a)$ کوچک اختیار شود).

اشکال 2 - ممکن است $f'(x)$ موجود نباشد یا محاسبه آن دشوار باشد.
رفع اشکال - از فرمول (روش وتری) بجای فرمول تکرار نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$* \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

* مرتبه همگرائی روش وتری (1.6180) است.

حل دستگاه معادلات غیرخطی - (تعمیم روش نیوتن)

* $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

اگر (α,β) جواب دستگاه باشد یک همسایگی از آنها را می‌یابیم و باید در آن همسایگی $|f_x g_y - f_y g_x| \neq 0$ باشد - آنگاه x_0 و y_0 را تقریبهایی از α و β می‌گیریم.
(می‌توان از رسم منحنی‌ها کمک گرفت.)

* $\begin{cases} h_n f_x + K_n f_y = -f(x_n,y_n) \\ h_n g_x + K_n g_y = -g(x_n,y_n) \end{cases} \longrightarrow$ (h_n و K_n بدست می‌آید)

* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + K_n \end{cases}$

* سپس x_{n+1} و y_{n+1} را x_0 و y_0 جدید فرض می‌کنیم و عملیات را ادامه می‌دهیم تا شرط توقف برقرار شود.

حل دستگاه معادلات غیرخطی - (تعمیم روش تکرار ساده)

* $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستکاری}} \begin{cases} \varphi(x,y)=x \\ \psi(x,y)=y \end{cases}$

(x_0,y_0) را تقریبی از (α,β) می‌گیریم:

«شرط همگرائی» : $\left[\begin{array}{l} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < 1 \\ \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < 1 \end{array}\right]$

حل دستگاه معادلات غیرخطی - (روش من درآوردی)

* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n,y_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)} \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{g(x_n,y_n)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_n,y_n)} \end{cases}$

(x_0,y_0) را تقریبی از (α,β) می‌گیریم.
روشی برای تحقیق همگرائی وجود ندارد چون عملاً نمی‌توان x و y را ثابت گرفت.

حل دستگاه معادلات خطی - (روش حذفی گاوس)

$$\begin{array}{cccc:c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

ابتدا اگر لازم باشد ماتریس افزوده را مقیاس می کنیم (max را در هر سطر یافته، از میان a ها، سپس اعضای سطر را بر آن تقسیم می کنیم). آنگاه درصورت لزوم محورگیری جزئی می کنیم (در هر مرحله max را در ستون مربوط یافته و جای سطر مربوط به آن را با سطر اول مربوط به همان مرحله عوض می کنیم) و یا در صورت لزوم محورگیری کلی می کنیم (در مجموع a ها، max را یافته و جای سطر و ستون آن را با جای سطر و ستون مربوط به همان مرحله عوض می کنیم و به تناسب تعویض ستونها جای مجهولات مربوط را هم با یکدیگر عوض می کنیم). پس از انجام عملیات فوق، با اعمال $R_{1i}^{(\alpha)}$، $R_{2i}^{(\alpha)}$، ......، $R_{(n-1)i}^{(\alpha)}$ ماتریس را بالا مثلثی می کنیم و با عملیات پسرو مجهولات را از آخر به اول می یابیم.

نکته - یافتن وارون -

$$A\begin{bmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر فرضاً A سه در سه باشد حاصلضرب آن در وارونش ماتریس واحد سه در سه می شود. برای یافتن (x و y و z) دستگاه: $\left[\begin{array}{c:c} A & \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right]$ را حل می کنیم. m_{i1} و m_{i2} و m_{i3} و ...... را برای راحتی در محل صفرهایشان ذخیره می کنیم. در مرحله بعد تمام عملیات $R_{1i}^{(m_{i1})}$ و $R_{2i}^{(m_{i2})}$ و ...... را بر روی $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ انجام می دهیم تا به شکل $\boxed{M}$ در آید و آنگاه $\left[\begin{array}{c:c} A & M \end{array}\right]$ را حل می کنیم تا (x' و y' و z') حاصل شود و به همین ترتیب (x'' و y'' و z'') را هم می یابیم.

حل دستگاه معادلات خطی - (روش تکراری ژاکوبی)

$$
* \begin{cases} Ax + By + Cz = M & \longrightarrow & x^{(k+1)} = \dfrac{M - By^{(k)} - Cz^{(k)}}{A} \\ A'x + B'y + C'z = N & \longrightarrow & y^{(k+1)} = \dfrac{N - A'x^{(k)} - C'z^{(k)}}{B} \\ A''x + B''y + C''z = L & \longrightarrow & z^{(k+1)} = \dfrac{L - A''x^{(k)} - B''y^{(k)}}{C''} \end{cases} \qquad (\mathrm{I})
$$

تکرار جدید　　　　　　تکرار قبلی

* معمولاً فرض می شود : $X^{(0)} = \begin{bmatrix} x^{(0)} = 0 \\ y^{(0)} = 0 \\ z^{(0)} = 0 \end{bmatrix}$ و سپس نگاه با جایگزاری $x^{(0)}$ و $y^{(0)}$ و $z^{(0)}$ در معادلات (I) ، $X^{(1)}$ را می یابیم و با قرار دادن $x^{(1)}$ و $y^{(1)}$ و $z^{(1)}$ نیز $X^{(2)}$ را می یابیم و به همین طریق پیش می رویم . اگر اعداد بدست آمده تقریباً در معادلات صدق کنند و به سمت عدد معینی نزدیک شوند ، گوییم که این روش همگرا است .

* اگر A اکیداً قطر غالب (سطری یا ستونی) باشد ، حتی اگر تنها یکی از نامساوی‌ها برقرار باشد ، روش ژاکوبی همگرا است . گاهی اوقات می توان با تعویض جای - سطرهای ماتریس را اکیداً قطر غالب نمود .

حل دستگاه معادلات خطی - (روش تکراری گاس - سایدل)

$$
\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{M - By^{(k)} - Cz^{(k)}}{A} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{N - A'x^{(k+1)} - C'z^{(k)}}{B} \\ z^{(k+1)} = \dfrac{L - A''x^{(k+1)} - B''y^{(k+1)}}{C''} \end{cases}
$$

* دقیقاً مانند روش ژاکوبی است با این تفاوت که در هر مرحله اگر x یا y - جدیدی را یافتیم از همان استفاده - می کنیم چون دقیقتر است. شرط همگرائی مانند روش ژاکوبی است و همگرائی این روش از ژاکوبی سریعتر است .

4- درونیابی -

الف - روش لاگرانژ - بطور کلی ما یک سری عدد داریم به شکل x_n و ... و x_1 و x_0 که مقادیر تابع برای این اعداد بصورت f_n و ... و f_1 و f_0 در یک جدول به ما داده شده. هدف ما یافتن $f(x)$ است:

x	f
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{cases} f(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x) \\ L_j(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \end{cases}$$

* یعنی برای جدولی که به فرض x_1 و x_2 و x_3 داریم $L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ است و $L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ و .... .

ب - روش تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن -

$$* \quad P(x) = f_0 + (x-x_0)\, f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$

$$\begin{cases} f[x_0, x_1] = \dfrac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \quad \text{و} \quad f[x_1, x_2] = \dfrac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} \\ f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \quad \text{و} \quad \cdots \end{cases}$$

(مثال)

x_i	f_i
-1	1
1	3
3	13

$$\frac{1-3}{-1-1} = 1 = f[x_0, x_1]$$

$$\frac{3-13}{1-3} = 5 = f[x_1, x_2]$$

$$\frac{1-5}{-1-3} = 1 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$P(x) = 1 + (x-(-1)) \times 1 + (x-(-1))(x-1) \times 1$$

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

ج- روش تفاضلات پیشرو نیوتن -

هنگامی از این روش استفاده می کنیم که فواصل x_iها برابر باشد یعنی ($x_{i+1} - x_i = h$)

$$* \quad P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \cdots$$

$$\begin{cases} \Delta f_0 = f_1 - f_0 \\ \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 \\ \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \theta h \\ \theta = \dfrac{x - x_0}{h} \end{cases}$$

(مثال)

x_i	f_i			
-1	-1			
		$2 = \Delta f_0$		
0	1		$0 = \Delta^2 f_0$	
		$2 = \Delta f_1$		$1 = \Delta^3 f_0$
1	3		$1 = \Delta^2 f_1$	
		$3 = \Delta f_2$		
2	6			

$$\boxed{\begin{array}{l} h = 1 \\ \theta = x - (-1) \end{array}}$$

$$P(x) = -1 + (x+1)2 + \frac{(x+1)(x+1-1)}{2!}(0) + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}(1)$$

$$P(x) = \frac{1}{6}(x^3 + 11x) + 1$$

د- روش کمترین مربعات -

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax_i + b - f_i)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^{n} x_i (ax_i + b - f_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^{n} (ax_i + b - f_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\left(\sum_0^n x_i^2\right) + b\left(\sum_0^n x_i\right) = \sum_0^n x_i f_i \\ a\left(\sum_0^n x_i\right) + (n+1)b = \sum_0^n f_i \end{cases}$$

* a و b از این دستگاه بدست می آید و می توان $y = ax + b$ (خط کمترین مربعات جدول) را بدست آورد.

5 - تعیین مقدار تقریبی انتگرالهای معین -

الف - قاعدهٔ ذوزنقه‌ای -

$$T(h)=\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+2f_2+\dots+2f_{n-1}+f_n\right)$$

درمورد تقریب : $|ET(h)| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - T(h)\right| \propto h^2$

* اگر : $|f''(x)| \le M_2 \rightarrow$ M_2 بدست می‌آید

$|ET(h)| \le \frac{b-a}{12}h^2 M_2 \le \varepsilon \rightarrow$ ($h \le$ عدد) h بدست می‌آید

n تعداد نقاطی است که تابع باید در آنها حساب شود تا تقریب مورد نظر بدست آید.

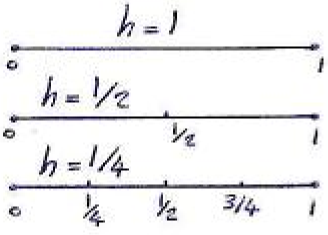
$(b-a)=nh \rightarrow n \ge \frac{b-a}{h}$ و $n \in \mathbb{Z}$

$h=\frac{b-a}{n}$

حداقل n اوّلین عدد صحیح پس از عدد بدست آمده است.

* روش ذوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه اوّل دقیق است ($f''=0$).

مثال ۱- $\int_0^1 x^2\,dx = ?$ و مقایسه خطاهای مطلق ؟!



(1) $T(1)=\frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$

(2) $T(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\left(f(0)+2f(\frac{1}{2})+f(1)\right)=\frac{3}{8}$

(3) $T(\frac{1}{4})=\frac{1}{8}\left(f(0)+2f(\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})+f(1)\right)=\frac{11}{3}$

(1) $\rightarrow$ $|ET_{(1)}| = \left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$

(2) $\rightarrow$ $|ET_{(\frac{1}{2})}| = \left|\frac{1}{3}-\frac{3}{8}\right| = \frac{1}{24}$ ($\frac{1}{3}$ مقدار واقعی انتگرال)

(3) $\rightarrow$ $|ET_{(\frac{1}{4})}| = \left|\frac{1}{3}-\frac{11}{3}\right| = \frac{1}{96}$

مثال 2 - تقریبی از $\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$ به قاعده ذوزنقه ای حساب کنید که خطای مطلق آن از 10^{-4} کمتر باشد.

$f(x) = x\cos x$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$ * $f''(x) = -2\sin x - x\cos x$

$$|f''(x)| = |-2\sin x - x\cos x| \leqslant 2|\sin x| + |x||\cos x|$$
$$\leqslant 2 + \frac{\pi}{2} \simeq 3.6 = M_2$$

$$|ET(h)| \leqslant \frac{b-a}{12} h^2 M^2 \leqslant \varepsilon \rightarrow \frac{\pi/2}{12} h^2 (3.6) \leqslant 10^{-4}$$
$$\rightarrow h \leqslant 0.0146$$
$$\rightarrow \frac{1}{h} \geqslant \frac{1}{0.0146}$$

$$(b-a) = nh \rightarrow n = \frac{b-a}{h} \rightarrow n \geqslant \frac{\pi/2}{0.0146} \geqslant 107.589$$

$\rightarrow$ n حداقل $= 108$ $\rightarrow$ $h = \frac{\pi}{216}$

ب - قاعدهٔ سیمپسون -

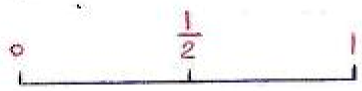
$$S(h) = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$ES(h) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$ * اگر : $|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4$

$$|ES(h)| \leqslant \frac{b-a}{180} h^4 M_4 \leqslant \varepsilon$$ * n در این روش حتماً زوج باید باشد.

* این روش برای چند جمله ای های تا درجه (3) دقیق است. $(f^{(4)} = 0)$

مثال ۱- $\int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4}$



* باید $h=\frac{1}{2}$ زیرا تعداد زیرفاصله‌ها (n) باید زوج باشد.

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}$$

مثال 2 - مثال (2) روش ذوزنقه ای را به این روش حل کنید.

$$|f^{(4)}(x)| = |4\sin x + x\cos x| \leqslant 4 + \frac{\pi}{2} \simeq 5.6 = M_4$$

$$|E_S(h)| \leqslant \frac{\pi/2}{180} h^4 (5.6) \leqslant 10^{-4} \rightarrow h \leqslant 0.2127$$

$$\rightarrow \frac{1}{h} \geqslant \frac{1}{0.2127}$$

$$n \geqslant \frac{\pi/2}{0.2127} \simeq 7.3813 \rightarrow$$

n حداقل $= 8$ $\rightarrow h = \frac{\pi}{16}$

* مشاهده می شود که قاعده سیمپسون دارای دقت بهتری بوده و مقرون به صرفه است.

فرشاد سرائی

۷۲ / ۳ / ۱۶